Examen blanc de Mathématiques
2ème année Baccalauréat - Sciences PC et SVT

Réalisé par Youssef SEMHI

Contact : 0644127117/0708875223

Exercice 1

On considère la suite numérique (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{2u_n + 3}{2u_n + 7}; n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1. Montrer par récurrence que $(\forall n \in \mathbb{N})$: $\frac{1}{2} < u_n \leq 1$.
2. Montrer que : $u_{n+1} - u_n = \dfrac{(1 - 2u_n)(u_n + 3)}{2u_n + 7}$ puis déduire que (u_n) est décroissante et qu'elle est convergente.
3. (a) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$: $u_{n+1} - \dfrac{1}{2} \leq \dfrac{1}{8}\left(u_n - \dfrac{1}{2}\right)$.

   (b) Déduire que pour tout n de $\mathbb{N}$: $u_n - \dfrac{1}{2} \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^{3n+1}$, puis déduire la limite de (u_n).
4. On considère la suite numérique (w_n) définie par : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $w_n = \ln(2 - u_n)$. Calculer $\lim w_n$.
5. On considère la suite numérique (v_n) définie par : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $v_n = \dfrac{u_n - \frac{1}{2}}{u_n + 3}$.

   (a) Vérifier que $(\forall n \in \mathbb{N})$:
   $$\frac{u_{n+1} - \frac{1}{2}}{u_{n+1} + 3} = \frac{1}{8}\left(\frac{u_n - \frac{1}{2}}{u_n + 3}\right)$$

   (b) Déduire v_n puis u_n en fonction de n.

Exercice 2

1. On considère, dans l'ensemble $\mathbb{C}$, l'équation :
   $$(E) : \frac{1}{2}z^2 - z + 2 + \sqrt{2} = 0$$

   (a) Montrer que le discriminant de (E) est $\Delta = -(1 + \sqrt{2})^2$.

   (b) En déduire les solutions de (E).
2. On considère, dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}; \vec{v})$, les points A, B d'affixes respectives :
   $$a = 1 + i(1 + \sqrt{2}), \quad b = \overline{a}$$

   Vérifier que :
   $$a = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\overline{a}$$

3. Soit z l'affixe du point M du plan et z' l'affixe du point M' image de M par la rotation R de centre O et d'angle $\frac{3\pi}{4}$.
   (a) Montrer que :
   $$z' = \left(\frac{a}{\overline{a}}\right) z$$
   puis vérifier que A est l'image de B par la rotation R.
   (b) En déduire que la forme trigonométrique de a est :
   $$a = |a| \left(\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{8}\right)\right)$$
4. Soit C le point d'affixe :
   $$c = 2 + \sqrt{2}$$
   Vérifier que :
   $$\overline{a} - c = i(a - c)$$
   puis en déduire la nature du triangle CAB.

Exercice 3

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$, on considère :

Les points $A(0;-2;-2)$, $B(1;-2;-4)$, $C(-3;-1;2)$

La sphère (S) d'équation $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z - 11 = 0$

1. Montrer que le centre de la sphère est $\Omega(1;2;3)$ et que son rayon vaut 5.
2. Montrer que $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = 2\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$, puis en déduire que les points A, B et C ne sont pas alignés.
3. Montrer que $2x + 2y + z + 6 = 0$ est l'équation cartésienne du plan (ABC).
4. Calculer la distance $d(\Omega, (ABC))$ puis en déduire que le plan (ABC) est tangent à la sphère (S).
5. (a) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (Δ) passant par Ω et perpendiculaire au plan (ABC).
   (b) Montrer que (Δ) coupe la sphère (S) en deux points $E\left(\frac{13}{3}, \frac{16}{3}, \frac{14}{3}\right)$ et $F\left(-\frac{7}{3}, -\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)$.
   (c) Vérifier que F est le point de contact entre le plan et la sphère.

Exercice 4

Un sac contient 12 boules indiscernables au toucher :

5 boules noires

4 boules blanches

3 boules rouges

On tire au hasard simultanément trois boules du sac.
On considère les événements :

A : "Obtenir trois boules de même couleur"

B : "Obtenir au moins une boule blanche"

1. (a) Calculer $P(A)$, $P(B)$ et $P(A \cap B)$, puis en déduire $P(A \cup B)$.
   (b) Les événements A et B sont-ils indépendants ?
2. Calculer la probabilité d'obtenir au moins une boule blanche sachant que les trois boules tirées sont de même couleur.
3. On répète l'expérience précédente 4 fois en remettant à chaque fois les boules tirées dans le sac. Quelle est la probabilité que l'événement B soit réalisé exactement deux fois ?

PROBLEM

Soit f une fonction numérique définie sur $[1;+\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(x) = 2x + (1-x)\ln(x-1) & \text{pour } x > 1 \\ f(1) = 2 \end{cases}$$

Soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1. Montrer que f est continue à droite en 1.
2. a) Montrer que $\forall x \in [1;+\infty[,\ \dfrac{f(x)-2}{x-1} = 2 - \ln(x-1)$.
   b) En déduire que f n'est pas dérivable à droite en 1, puis interpréter géométriquement ce résultat.
3. a) Montrer que $\forall x \in [1;+\infty[,\ f(x) = x\left[2 + \left(\dfrac{1}{x} - 1\right)\ln(x-1)\right]$.
   b) Déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$, puis interpréter géométriquement.
4. a) Montrer que $\forall x \in [1;+\infty[,\ f'(x) = 1 - \ln(x-1)$.
   b) Résoudre dans $[1;+\infty[$ l'inéquation $1 - \ln(x-1) < 0$.
   c) En déduire que f est croissante sur $[1;e+1]$ et décroissante sur $[e+1;+\infty[$.
   d) Dresser le tableau de variations de f, puis construire la courbe (C_f).
5. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α sur $[e+1;+\infty[$ et que $e+1 < \alpha < e^2+2$.
6. a) Montrer que $\forall x \in [1;+\infty[,\ f(x) - 2 = (1-x)(\ln(x-1) - 2)$.
   b) Résoudre dans $[1;+\infty[$ l'inéquation $\ln(x-1) - 2 < 0$.
   c) Déduire le signe de $f(x) - 2$ sur $[1;e^2+1]$.
7. (a) En utilisant une intégration par parties, calculer $\int_{e+1}^{e^2+2}(1-x)\ln(x-1)\,dx$.
   (b) Calculer en cm^2 l'aire de la partie du plan délimitée par (C_f), et les droites $x = e+1$, $x = e^2+2$, $y = 2$.

Correction

Corrige exercice 1 :

1)

Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{1}{2} < u_n \leq 1$.

Initialisation : Pour $n = 0$, $u_0 = 1$ et $\frac{1}{2} < u_0 \leq 1$. vraie
Hérédité : Supposons $\frac{1}{2} < u_n \leq 1$. Montrons que $\frac{1}{2} < u_{n+1} \leq 1$.
On a :

$$u_{n+1} = \frac{2u_n + 3}{2u_n + 7}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} < u_n \leq 1 &\Rightarrow 4 < 2u_n + 3 \leq 5 \\ &\Rightarrow 8 < 2u_n + 7 \leq 9 \\ &\Rightarrow \frac{1}{9} < \frac{1}{2u_n + 7} \leq \frac{1}{8}\end{aligned}$$

Donc :

$$\frac{4}{9} < u_{n+1} \leq \frac{5}{8}$$

Or $\frac{4}{9} \approx 0.444 > \frac{1}{2}$ et $\frac{5}{8} = 0.625 < 1$.
Conclusion : Par récurrence, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \frac{1}{2} < u_n \leq 1}$.

2)

$\forall n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}u_{n+1} - u_n &= \frac{2u_n + 3}{2u_n + 7} - u_n \\ &= \frac{2u_n + 3 - u_n(2u_n + 7)}{2u_n + 7} \\ &= \frac{2u_n + 3 - 2u_n^2 - 7u_n}{2u_n + 7} \\ &= \frac{-2u_n^2 - 5u_n + 3}{2u_n + 7} \\ &= \frac{-(2u_n^2 + 5u_n - 3)}{2u_n + 7} \\ &= \frac{-(2u_n - 1)(u_n + 3)}{2u_n + 7} \\ &= \frac{(1 - 2u_n)(u_n + 3)}{2u_n + 7}\end{aligned}$$

Signe :

$1 - 2u_n < 0$ (car $u_n > \frac{1}{2}$)

$u_n + 3 > 0$

$2u_n + 7 > 0$

Donc $u_{n+1} - u_n < 0$: la suite est **strictement décroissante**.
Convergence : La suite est décroissante et minorée par $\frac{1}{2}$, donc convergente.

3)

a) $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} u_{n+1}-\frac{1}{2} &= \frac{2u_n+3}{2u_n+7}-\frac{1}{2} \\ &= \frac{2(2u_n+3)-(2u_n+7)}{2(2u_n+7)} \\ &= \frac{4u_n+6-2u_n-7}{4u_n+14} \\ &= \frac{2u_n-1}{4u_n+14} \\ &\leq \frac{2u_n-1}{16} \quad (\text{car } 4u_n+14 \geq 16) \end{aligned}$$

et

$$\frac{2u_n-1}{16}=\frac{2\left(u_n-\frac{1}{2}\right)}{16}=\frac{u_n-\frac{1}{2}}{8}.$$

conclution : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1}-\frac{1}{2} \leq \frac{u_n-\frac{1}{2}}{8}}$

b) **Initialisation (n=0) :**

$$u_0-\frac{1}{2}=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}=\left(\frac{1}{2}\right)^{3\times 0+1}$$

L'inégalité est vérifiée pour $n=0$.

Hérédité : Supposons que pour un entier $n \geq 0$, on ait :

$$u_n-\frac{1}{2} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{3n+1}$$

Montrons que cela implique :

$$u_{n+1}-\frac{1}{2} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{3(n+1)+1}=\left(\frac{1}{2}\right)^{3n+4}$$

D'après la question précédente, on a :

$$u_{n+1}-\frac{1}{2} \leq \frac{1}{8}\left(u_n-\frac{1}{2}\right)$$

En appliquant l'hypothèse de récurrence :

$$u_{n+1}-\frac{1}{2} \leq \frac{1}{8} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{3n+1}=\left(\frac{1}{2}\right)^{3} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{3n+1}=\left(\frac{1}{2}\right)^{3n+4}$$

$$u_{n+1}-\frac{1}{2} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{3n+4}$$

Conclusion : Par le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n-\frac{1}{2} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{3n+1}$$

Calcul de la limite

Quand $n \to +\infty$:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{3n+1} \to 0$$

Donc par encadrement :

$$\lim_{n\to+\infty}\left(u_n - \frac{1}{2}\right) = 0 \quad \text{soit} \quad \boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{1}{2}}$$

4)

$w_n = \ln(2 - u_n)$. Quand $n \to +\infty$:

$$2 - u_n \to \frac{3}{2} \Rightarrow \boxed{\lim_{n\to+\infty} w_n = \ln\left(\frac{3}{2}\right)}$$

5)

a) $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
\frac{u_{n+1} - \frac{1}{2}}{u_{n+1} + 3} &= \frac{\frac{2u_n + 3}{2u_n + 7} - \frac{1}{2}}{\frac{2u_n + 3}{2u_n + 7} + 3} \\
&= \frac{\frac{2u_n - 1}{4u_n + 14}}{\frac{8u_n + 24}{2u_n + 7}} \\
&= \frac{2u_n - 1}{4u_n + 14} \times \frac{2u_n + 7}{8u_n + 24} \\
&= \frac{(2u_n - 1)\cancel{(2u_n + 7)}}{2\cancel{(2u_n + 7)} \times 8(u_n + 3)} \\
&= \frac{2u_n - 1}{16(u_n + 3)} \\
&= \frac{1}{8}\left(\frac{u_n - \frac{1}{2}}{u_n + 3}\right).
\end{aligned}$$

b) (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{8}$: Isolons u_n :

$$\begin{aligned}
v_n(u_n + 3) &= u_n - \frac{1}{2} \\
v_n u_n + 3v_n &= u_n - \frac{1}{2} \\
v_n u_n - u_n &= -3v_n - \frac{1}{2} \\
u_n(v_n - 1) &= -3v_n - \frac{1}{2} \\
u_n &= \frac{-3v_n - \frac{1}{2}}{v_n - 1} = \frac{\frac{1}{2} + 3v_n}{1 - v_n}.
\end{aligned}$$

Substituons $v_n = \dfrac{1}{8^{n+1}}$:

$$u_n = \frac{\frac{1}{2} + \frac{3}{8^{n+1}}}{1 - d\frac{1}{8^{n+1}}} = \boxed{\frac{\frac{1}{2} + \frac{3}{8^{n+1}}}{1 - \frac{1}{8^{n+1}}}}.$$

Corrige exercice 2 :

1)

$$(E) : \frac{1}{2}z^2 - z + 2 + \sqrt{2} = 0$$

a) **Calcul du discriminant** :

$$\begin{aligned}
\Delta &= b^2 - 4ac \\
&= (-1)^2 - 4\left(\frac{1}{2}\right)(2+\sqrt{2}) \\
&= 1 - 2(2+\sqrt{2}) \\
&= -3 - 2\sqrt{2} \\
&= -(1 + 2\sqrt{2} + 2) \\
&= \boxed{-(1+\sqrt{2})^2}
\end{aligned}$$

b) **Solutions de** (E) :

$$\begin{aligned}
z &= \frac{1 \pm i\sqrt{-(1+\sqrt{2})^2}}{1} \\
&= 1 \pm i(1+\sqrt{2})
\end{aligned}$$

Les solutions sont :

$$\boxed{z_1 = 1 + i(1+\sqrt{2})} \quad \text{et} \quad \boxed{z_2 = 1 - i(1+\sqrt{2})}$$

2)

$$\begin{aligned}
a &= 1 + i(1+\sqrt{2}) \\
b &= \overline{a} = 1 - i(1+\sqrt{2})
\end{aligned}$$

on a :

$$\begin{aligned}
\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\overline{a} &= \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)(1-i(1+\sqrt{2}))\\
&= -\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot 1+\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\cdot(-i(1+\sqrt{2}))\\
&\quad +i\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot 1+i\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot(-i(1+\sqrt{2}))\\
&= -\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}(1+\sqrt{2})+i\frac{\sqrt{2}}{2}-i^2\frac{\sqrt{2}}{2}(1+\sqrt{2})\\
&= -\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}(1+\sqrt{2}+1)+\frac{\sqrt{2}}{2}(1+\sqrt{2}) \quad (\text{car } i^2=-1)\\
&= -\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}(2+\sqrt{2})+\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{2}{2}\\
&= \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\frac{2}{2}+i(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\sqrt{2})\\
&= 0+1+i(1+1)\\
&= 1+i(1+\sqrt{2})\\
&= \boxed{a}
\end{aligned}$$

3)

a) **On a** :

$$e^{i\frac{3\pi}{4}} = \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Et on a :

$$\begin{aligned}
\frac{a}{\overline{a}} &= \frac{1+i(1+\sqrt{2})}{1-i(1+\sqrt{2})}\\
&= \frac{[1+i(1+\sqrt{2})][1+i(1+\sqrt{2})]}{[1-i(1+\sqrt{2})][1+i(1+\sqrt{2})]}\\
&= \frac{1+2i(1+\sqrt{2})+i^2(1+\sqrt{2})^2}{1+(1+\sqrt{2})^2}\\
&= \frac{1+2i(1+\sqrt{2})-(3+2\sqrt{2})}{4+2\sqrt{2}}\\
&= \frac{-2-2\sqrt{2}+2i(1+\sqrt{2})}{4+2\sqrt{2}}\\
&= \frac{2(-1-\sqrt{2}+i(1+\sqrt{2}))}{2(2+\sqrt{2})}\\
&= \frac{(-1-\sqrt{2}+i(1+\sqrt{2}))}{2+\sqrt{2}}\\
&= \frac{(-1)(1+\sqrt{2})+i(1+\sqrt{2})}{2+\sqrt{2}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(1+\sqrt{2})(-1+i)}{2+\sqrt{2}} \\
&= \frac{(1+\sqrt{2})(-1+i)(2-\sqrt{2})}{(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})} \\
&= \frac{(1+\sqrt{2})[(-2+\sqrt{2})+i(2-\sqrt{2})]}{4-2} \\
&= \frac{(1+\sqrt{2})[(-2+\sqrt{2})+i(2-\sqrt{2})]}{2} \\
&= \frac{-\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{2} \\
&= -\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2} \\
&= e^{i\frac{3\pi}{4}}
\end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{z' = \left(\frac{a}{\overline{a}}\right) z}$$

Vérification :

$$R(B) = e^{i\frac{3\pi}{4}}\overline{a} = a = A$$

b) On a :

$$\begin{aligned}
|a| &= |e^{i\frac{3\pi}{4}}| \cdot |\overline{a}| \\
&= 1 \cdot |a| \quad (\text{car } |e^{i\theta}| = 1 \text{ et } |\overline{a}| = |a|) \\
\Rightarrow |a| &= \sqrt{1^2 + (1+\sqrt{2})^2} \\
&= \sqrt{1 + (1 + 2\sqrt{2} + 2)} \\
&= \sqrt{4 + 2\sqrt{2}}
\end{aligned}$$

et on a :

$$\begin{aligned}
\frac{|a|e^{i\theta}}{|a|e^{-i\theta}} &= e^{i\frac{3\pi}{4}} \\
e^{i2\theta} &= e^{i\frac{3\pi}{4}} \\
2\theta &= \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \\
\theta &= \frac{3\pi}{8} + k\pi
\end{aligned}$$

Donc :

$$a = \boxed{\sqrt{4+2\sqrt{2}}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{8}\right)\right)}$$

4)

$$\begin{aligned}
&\overline{a} - c = i(a - c) \\
\Rightarrow\ &\frac{\overline{a} - c}{a - c} = i \\
\Rightarrow\ &\left|\frac{\overline{a} - c}{a - c}\right| = 1 \quad \text{et} \quad \arg\left(\frac{\overline{a} - c}{a - c}\right) = \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

Donc :

$$\boxed{\text{Le triangle } CAB \text{ est rectangle isocèle en } C}$$

Corrigé exercice 3 :

1)

L'équation de la sphère est :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z - 11 = 0$$

on a :

$$\begin{aligned}
x^2 - 2x &= (x - 1)^2 - 1 \\
y^2 - 4y &= (y - 2)^2 - 4 \\
z^2 - 6z &= (z - 3)^2 - 9
\end{aligned}$$

Donc :

$$(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 3)^2 - 1 - 4 - 9 - 11 = 0$$
$$(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 3)^2 = 25$$

Conclusion :

Centre : $\boxed{\Omega(1; 2; 3)}$

Rayon : $\boxed{5}$

2)

Vecteurs :

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Produit vectoriel :

$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 0 \times 4 - (-2) \times 1 \\ -2 \times (-3) - 1 \times 4 \\ 1 \times 1 - 0 \times (-3) \end{pmatrix} = \boxed{2\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}}$$

Non-alignement :

$$\text{Car } \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \neq \vec{0} \quad \text{(les points ne sont pas alignés)}$$

3)

Utilisons le produit vectoriel comme vecteur normal $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Équation du plan :

$$2(x-0) + 2(y+2) + 1(z+2) = 0$$
$$2x + 2y + 4 + z + 2 = 0$$
$$\boxed{2x + 2y + z + 6 = 0}$$

4)

Distance centre-plan :

$$d(\Omega, (ABC)) = \frac{|2 \times 1 + 2 \times 2 + 1 \times 3 + 6|}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2}} = \frac{15}{3} = \boxed{5}$$

On a :

$$d = R = 5 \quad \text{donc le plan est tangent à la sphère}$$

5)

(a) Représentation paramétrique :

$$(\Delta) : \begin{cases} x = x_\Omega + 2t \\ y = y_\Omega + 2t \\ z = z_\Omega + t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

$$(\Delta) : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 + 2t \\ z = 3 + t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

(b) Intersection avec (S) :

$$(1 + 2t - 1)^2 + (2 + 2t - 2)^2 + (3 + t - 3)^2 = 25$$
$$4t^2 + 4t^2 + t^2 = 25$$
$$9t^2 = 25 \Rightarrow t = \pm\frac{5}{3}$$

Points d'intersection :

$$E\left(1 + \frac{10}{3}, 2 + \frac{10}{3}, 3 + \frac{5}{3}\right) = \boxed{\left(\frac{13}{3}, \frac{16}{3}, \frac{14}{3}\right)}$$

$$F\left(1 - \frac{10}{3}, 2 - \frac{10}{3}, 3 - \frac{5}{3}\right) = \boxed{\left(-\frac{7}{3}, -\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)}$$

(c) Point de contact :

Vérifions que $F \in (ABC)$:

$$2\left(-\frac{7}{3}\right) + 2\left(-\frac{4}{3}\right) + \frac{4}{3} + 6 = 0 \quad \text{(vrai)}$$

Distance $F\Omega$:

$$x_F - x_\Omega = -\frac{7}{3} - 1 = -\frac{7}{3} - \frac{3}{3} = -\frac{10}{3}$$
$$y_F - y_\Omega = -\frac{4}{3} - 2 = -\frac{4}{3} - \frac{6}{3} = -\frac{10}{3}$$
$$z_F - z_\Omega = \frac{4}{3} - 3 = \frac{4}{3} - \frac{9}{3} = -\frac{5}{3}$$

$$(x_F - x_\Omega)^2 = \left(-\frac{10}{3}\right)^2 = \frac{100}{9}$$
$$(y_F - y_\Omega)^2 = \left(-\frac{10}{3}\right)^2 = \frac{100}{9}$$
$$(z_F - z_\Omega)^2 = \left(-\frac{5}{3}\right)^2 = \frac{25}{9}$$

$$\frac{100}{9} + \frac{100}{9} + \frac{25}{9} = \frac{225}{9} = 25$$
$$\sqrt{25} = 5$$
$$\boxed{F\Omega = 5}$$

Donc F est bien le point de tangence.

Corrige exercice 4 :

Boules noires : 5

Boules blanches : 4

Boules rouges : 3

Total : 12 boules

Nombre total de combinaisons possibles pour 3 boules :

$$\boxed{C_{12}^3 = 220}$$

1.a)

Probabilité de l'événement A : "3 boules de même couleur"

$$P(A) = \frac{C_5^3 + C_4^3 + C_3^3}{C_{12}^3}$$
$$= \frac{10 + 4 + 1}{220}$$
$$= \boxed{\frac{15}{220} = \frac{3}{44}}$$

Probabilité de l'événement B : "Au moins 1 blanche"

$$\begin{aligned}P(B) &= 1 - P(\text{"Aucune blanche"})\\ &= 1 - \frac{C_8^3}{C_{12}^3}\\ &= 1 - \frac{56}{220}\\ &= \boxed{\frac{164}{220} = \frac{41}{55}}\end{aligned}$$

Probabilité de A et B : "3 boules de même couleur ET au moins 1 blanche"

$$\begin{aligned}P(A \cap B) &= P(\text{"3 blanches"})\\ &= \frac{C_4^3}{C_{12}^3}\\ &= \boxed{\frac{4}{220} = \frac{1}{55}}\end{aligned}$$

Probabilité de A ou B

$$\begin{aligned}P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B)\\ &= \frac{15}{220} + \frac{164}{220} - \frac{4}{220}\\ &= \boxed{\frac{175}{220} = \frac{35}{44}}\end{aligned}$$

1.b)

On a :

$$P(A) \times P(B) = \frac{3}{44} \times \frac{41}{55} = \frac{123}{2420} \neq \frac{1}{55} = P(A \cap B)$$

Donc Les événements A et B ne sont pas indépendants.

2)

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{4}{220}}{\frac{15}{220}} = \boxed{\frac{4}{15}}$$

3)

Modélisation par une loi binomiale $\mathcal{B}(n = 4, p = \frac{41}{55})$:

$$P(X = 2) = C_4^2 \left(\frac{41}{55}\right)^2 \left(1 - \frac{41}{55}\right)^2$$

$$= 6 \times \left(\frac{41}{55}\right)^2 \times \left(\frac{14}{55}\right)^2$$

$$P(X = 2) = \boxed{\frac{1975704}{9150625}}$$

Corrigé de Problem

1)

On a :

$$\lim_{x\to1^+} f(x) = \lim_{x\to1^+} [2x+(1-x)\ln(x-1)] = 2+0 = 2 = f(1)$$

donc : $\boxed{f \text{ est continue à droite en 1.}}$

2)

a) Pour tous $x > 1$:

$$\frac{f(x)-2}{x-1} = \frac{2x-2+(1-x)\ln(x-1)}{x-1} = 2-\ln(x-1)$$

$$\boxed{\frac{f(x)-2}{x-1} = 2-\ln(x-1)}$$

b) On a :

$$\lim_{x\to1^+} \frac{f(x)-2}{x-1} = \lim_{x\to1^+} 2-\ln(x-1) = +\infty \quad (\text{car } \lim_{x\to1^+} \ln(x-1) = -\infty)$$

$\boxed{f \text{ n'est pas dérivable à droite en 1.}}$

Interprétation géométrique : La courbe admet une tangente verticale en $x = 1$.

3)

a) Pour tous $x > 1$:

$$f(x) = 2x+(1-x)\ln(x-1)$$

$$f(x) = x\left[2+\frac{1-x}{x}\ln(x-1)\right]$$

$$f(x) = x\left[2+\left(\frac{1}{x}-1\right)\ln(x-1)\right]$$

$$\boxed{f(x) = x\left[2+\left(\frac{1}{x}-1\right)\ln(x-1)\right]}$$

b) on a :

$\lim_{x\to+\infty} \ln(x-1) = +\infty$
Donc $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$
$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} 2-\ln(x-1) = -\infty$

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty}$$

Interprétation : La courbe (C_f) admet une branche parabolique suivant l'axe (Oy) au voisinage de $+\infty$.

4)

a) Pour tous $x > 1$:

$$f'(x) = 2 - \ln(x-1) + (1-x)\cdot\frac{1}{x-1} = 1 - \ln(x-1)$$

$\boxed{f'(x) = 1 - \ln(x-1)}$

b) Résolution de $1 - \ln(x-1) < 0$:

$$\ln(x-1) > 1 \Rightarrow x-1 > e \Rightarrow x > e+1$$

$\boxed{\mathrm{S} =]e+1, +\infty[}$

c) On a :

$f'(x) > 0$ sur $[1, e+1[\Rightarrow f$ croissante

$f'(x) < 0$ sur $]e+1, +\infty[\Rightarrow f$ décroissante

$\boxed{f \text{ croissante sur } [1, e+1] \text{ et décroissante sur } [e+1, +\infty[}$

d) Tableau de variations :

x	1		$e+1$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	-	
$f(x)$	2	$\nearrow$	$f(e+1)$	$\searrow$	$-\infty$

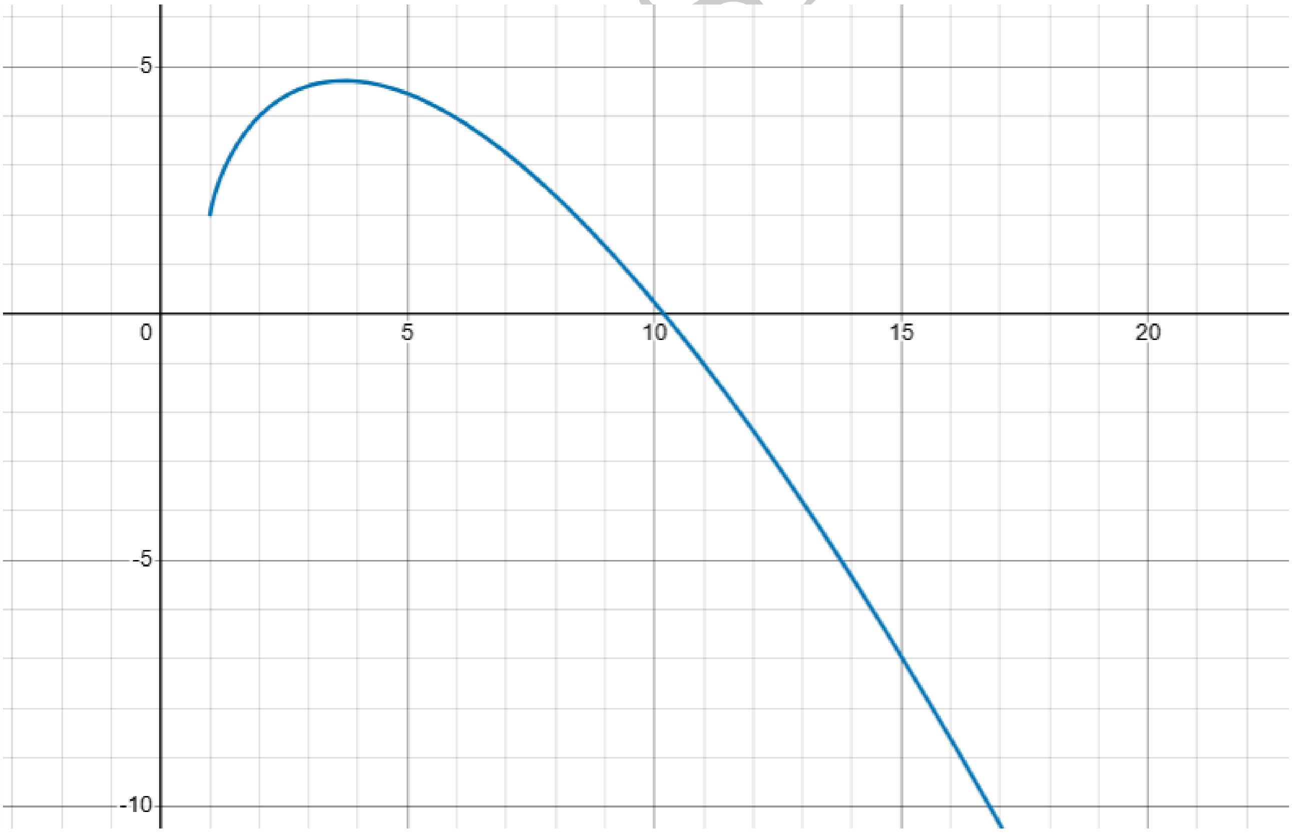

Figure 1 – la courbe de la fonction f

5)

$f(e+1) = 2(e+1) - e > 0$
$f(e^2+2) = 2(e^2+2) + (1-e^2-2)\cdot 2 = -e^2 + 2e^2 - 2 < 0$
f continue et strictement décroissante sur $[e+1, +\infty[$

$\boxed{\exists! \alpha \in]e+1, e^2+2[\text{ tel que } f(\alpha) = 0}$

6. Signe de $f(x) - 2$

a) on a :

$$f(x) - 2 = 2x + (1-x)\ln(x-1) - 2 = (1-x)(\ln(x-1) - 2)$$

$\boxed{f(x) - 2 = (1-x)(\ln(x-1) - 2)}$

b) Résolution de $\ln(x-1) - 2 < 0$:

$$x - 1 < e^2 \Rightarrow x < e^2 + 1$$

$\boxed{\mathrm{S} =]1, e^2+1[}$

c) Signe :

Sur $[1, e^2+1[$: $\ln(x-1) - 2 < 0$ et $1 - x \leq 0$ donc $f(x) - 2 \geq 0$
En $x = 1$: $f(1) - 2 = 0$

$\boxed{f(x) - 2 > 0 \text{ sur }]1, e^2+1]}$

7)

a) Intégration par parties :

$$\begin{cases} u = \ln(x-1) & \Rightarrow u' = \dfrac{1}{x-1} \\ v' = (1-x) & \Rightarrow v = x - \dfrac{x^2}{2} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \int_{e+1}^{e^2+2} (1-x)\ln(x-1) &= \left[\left(x - \frac{x^2}{2}\right)\ln(x-1)\right]_{e+1}^{e^2+2} - \int_{e+1}^{e^2+2} \frac{x - \frac{x^2}{2}}{x-1}\,dx \\ &= A - B \end{aligned}$$

Calcul de A :

$$\begin{aligned} A &= \left(e^2 + 2 - \frac{(e^2+2)^2}{2}\right)\ln(e^2+1) - \left(e + 1 - \frac{(e+1)^2}{2}\right)\ln e \\ &= \left(-\frac{e^4}{2} - 2e^2 - 1\right)\ln(e^2+1) - \left(-\frac{e^2}{2} - e + \frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

Simplification de B :

$$B = \int \frac{\frac{x^2}{2} + x}{x-1}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{x^2 - 2x}{x-1}\,dx = \frac{1}{2}\int \left(x - 1 - \frac{1}{x-1}\right)dx$$

Résultat final :

$$\boxed{\int_{e+1}^{e^2+2} (1-x)\ln(x-1) = \left(-\frac{e^4}{4} - e^2 - \frac{1}{2}\right)\ln(e^2+1) + \frac{e^2}{2} + e - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\ln e}$$

b) L'aire :

$$\mathcal{A} = \int_{e+1}^{e^2+2} |f(x) - 2|\, dx = \int_{e+1}^{e^2+2} (x-1)(2 - \ln(x-1))\, dx$$

Calcul :

$$\mathcal{A} = \left[\frac{(x-1)^2}{2}(2 - \ln(x-1))\right]_{e+1}^{e^2+2} + \frac{1}{2}\int_{e+1}^{e^2+2} (x-1)\, dx$$

Résultat :

$$\boxed{\mathcal{A} = \frac{(e^2+1)^2}{2}(2-2) - \frac{e^2}{2}(2-1) + \frac{(e^2+1)^2 - e^2}{4} = \frac{e^4+e^2}{4}\ \text{cm}^2}$$